

Chapitre 1

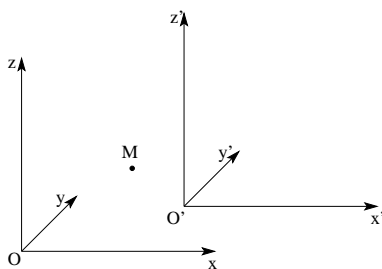
Cinématique relativiste

1.1 Postulats de la mécanique restreinte ou cinématique relativiste

Einstein base sa théorie sur deux postulats :

- Les lois physiques sont invariantes dans tout changement de référentiel galiléen (les résultats de toute expérience conduite à l'intérieur d'un référentiel sont indépendants de tout mouvement de translation rectiligne uniforme de ce référentiel par rapport à un référentiel galiléen).
- La vitesse de la lumière est une constante universelle. Elle est la même dans tous les repères galiléens.
- Remarque 1 : les lois de la Mécanique classique et la transformation de Galilée doivent être valables, en première approximation, lorsque les vitesses restent faibles devant c .
- Remarque 2 : la masse m , la charge q d'une particule sont propres à celle-ci c'est-à-dire invariantes par changement de référentiel galiléen

1.2 Abandon d'un temps universel



Soit deux référentiels galiléens \mathcal{R} et \mathcal{R}^* , les directions Ox et O^*x^* coïncident. On règle les horloges de chaque référentiel de telle sorte que, pour $t = t^* = 0$, les origines O et O^* soient confondues.

On a $\vec{v}_{O^*/O} = v\vec{u}_x$.

Imaginons qu'un flash lumineux soit émis à $t = t^* = 0$, ie au moment où O et O^* sont confondues. Un détecteur de lumière est placé en M . L'instant de réception du signal s'écrit $t = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{c}$ dans \mathcal{R} . Et dans \mathcal{R}^* , (puisque c est une constante universelle) $\frac{\sqrt{x^{*2}+y^{*2}+z^{*2}}}{c} = t^* \neq t$ dans \mathcal{R}^* . Donc l'événement "réception du signal lumineux" n'a pas la même date dans \mathcal{R} et \mathcal{R}^* . Donc un événement est relaté par sa position et son temps (x, y, z, t) dans le référentiel galiléen où on l'examine.

Par contre dans chaque référentiel, on a $ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $ct^* = \sqrt{x^{*2} + y^{*2} + z^{*2}}$, on a donc la métrique suivante :

$$ds^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = ds^{*2} = c^2t^{*2} - x^{*2} - y^{*2} - z^{*2} (= 0 \text{ car ici vitesse flash lumineux} = c)$$

Cela signifie aussi que cette grandeur ds^2 est invariante par changement de référentiel galiléen.

1.3 Transformations de Lorentz

La physique est la même quelque soit le référentiel, il doit exister une relation entre (x, y, z, t) et (x^*, y^*, z^*, t^*) . En d'autre terme, il existe une infinité continue de repères physiquement équivalents. Donc, en ce limitant à un espace à (1+1) dimensions (x et t), on a :

$$x^* = f(x, t, \phi_1, \dots, \phi_n) \text{ et } t^* = g(x, t, \phi_1, \dots, \phi_n) \text{ où les } \phi_n \text{ sont des paramètres à déterminer.}$$

Considérons un événement, ie que x et t sont donnés.

Avec un système d'équations de 2 équations et n inconnues, on obtient une, voir plusieurs solutions quelque soit (x^*, t^*) : ce qui est un peu trop.

Reste $n = 0$, mais $x^* = f(x, t)$ et $t^* = g(x, t)$ signifie qu'il n'y a que deux référentiels équivalents (c'est trop peu!).

Il reste donc $n = 1$ (comme dans le cas d'une rotation)! Le système d'équation *linéaire* à 1 paramètre s'écrit : $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct^* \\ x^* \end{pmatrix}$ avec la contrainte¹ de respecter $ds^2 = ds^{*2}$.

$$\text{Donc } c^2t^2 - x^2 = (C(ct^*) + Dx^*)^2 - (A(ct^*) + Bx^*)^2 = -(-C^2 + A^2)c^2t^{*2} + (D^2 - B^2)x^{*2} + 2(CD - AB)x^*(ct^*) = c^2t^{*2} - x^{*2}.$$

Donc $A^2 - C^2 = 1$, $D^2 - B^2 = 1$ et $CD - AB = 0$. La première relation nous dit qu'il existe un réel ϕ_1 tel que $A = \cosh \phi_1$, $C = \sinh \phi_1$; la deuxième nous dit qu'il existe un réel ϕ_2 tel que $D = \cosh \phi_2$, $B = \sinh \phi_2$; la dernière donne alors $\sinh \phi_1 \cosh \phi_2 - \cosh \phi_1 \sinh \phi_2 = \sinh(\phi_1 - \phi_2) = 0$ donc $\phi_1 = \phi_2$, on obtient donc :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct^* \\ x^* \end{pmatrix}$$

Si on regarde le point O^* ($x^* = 0$) dans le référentiel \mathcal{R} , on doit avoir $x_O = vt$. Ici on a :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct^* \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \sinh \phi ct^* \text{ et } ct = \cosh \phi ct^* \text{ donc } x = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} ct$$

on en conclut que $\frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} c = v$.

Donc $\tanh \phi = \frac{v}{c} = \beta$ et $\cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$, d'où les transformation de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct^* \\ x^* \end{pmatrix}$$

Et sous une écriture plus commune avec la transformation inverse :

$$\begin{array}{ll} ct & = \gamma(ct^* + \beta x^*) & ct^* & = \gamma(ct - \beta x) \\ x & = \gamma(x^* + \beta ct^*) & x^* & = \gamma(x - \beta ct) \\ y & = y^* & y^* & = y \\ z & = z^* & z^* & = z \end{array}$$

Nous montrez que $c^2t^{*2} - x^{*2} - y^{*2} - z^{*2} = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Cela signifie que **la norme carrée ainsi définie est invariante par changement de référentiel**.

¹Si vous remplacez ct par y et ct^* par y^* , et si imposez la condition $x^2 + y^2 = x^{*2} + y^{*2}$, vous allez retrouver la matrice de rotation

1.4 Domaine de variation de β et γ

On a par définition que $\beta = \frac{v}{c}$, mais en cinématique relativiste aucun phénomène ne peut dépasser la célérité de la lumière sous peine d'une perte de la causalité ("flash lumineux reçu avant d'être émis"), donc β varie de 0 à 1!

γ varie de 1 à $+\infty$.

Le cas classique (mécanique non relativiste) se trouve (ainsi que la transformation de Galilée) lorsque $\gamma \rightarrow 1$ et $\beta \rightarrow 0$. Dès que $\beta > 0.1$, il faut appliquer la cinématique relativiste.

1.5 Impulsion, énergie cinétique et énergie totale

Il faut aussi réécrire le principe fondamentale de la dynamique ($\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$), afin que cette loi soit invariante dans les transformations Lorentz. On montre que :

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

où m est la masse de la particule quel que soit le référentiel. L'énergie cinétique s'obtient² avec $dT_c = dp.v$, puis par intégration³ $T_c = \gamma mc^2 + cst$. On veut $T_c = 0$ si $v = 0$ donc $cst = -mc^2$. Finalement :

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \text{ et } T_c = \gamma mc^2 - mc^2 \Rightarrow \text{l'énergie totale } E = \gamma mc^2 = mc^2 + T_c$$

1.6 Place aux quadrivecteurs

On définit le quadrivecteur énergie-impulsion d'une particule de masse m , d'énergie totale E et d'impulsion \vec{p} comme un vecteur à 4 dimensions qui s'écrit :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p}c \end{pmatrix} \text{ la norme s'écrit } \mathcal{P}^2 = E^2 - p^2c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = m^2 c^4 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 c^4$$

La norme est donc invariante par changement de référentiel. Dans le cas d'un système définissant l'état initial d'une collision (projectile sur cible), c'est la norme du quadrivecteur total qui est conservé par changement de référentiel.

1.6.1 Exemples :

- Particule de masse m au repos : $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} mc^2 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{P}^2 = m^2 c^4$
- Particule de masse m d'impulsion \vec{p} : $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p}c \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{P}^2 = E^2 - p^2c^2 = m^2 c^4$. donc $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, on a aussi $E = \gamma mc^2$, et $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ et $\vec{p}c = \gamma mc \vec{v} = \gamma mc^2 \vec{\beta} = E \vec{\beta}$.

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} \text{ et } \vec{\beta} = \frac{\vec{p}c}{E}$$

²En classique $dT_c = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} \cdot dt = dp.v$, or $dp = m dv$, donc $T_c = \frac{1}{2}mv^2 + cst$ avec $cst = 0$ pour avoir $T_c = 0$ avec $v = 0$.

³Dérivez plutôt le résultat! Attention $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

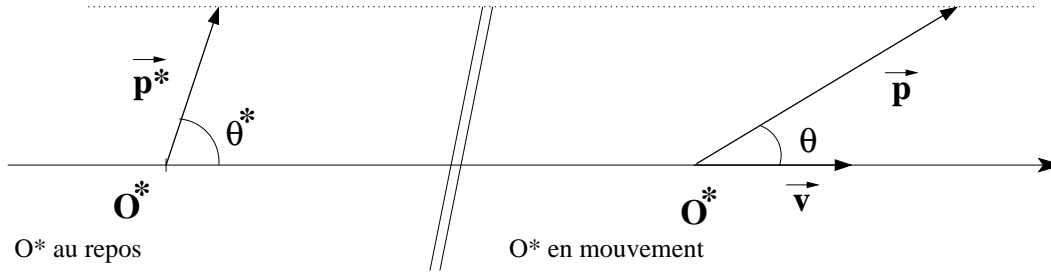


FIG. 1.1 – Changement de référentiel d’une impulsion \vec{p} . L’angle θ est défini entre l’impulsion et la vitesse de déplacement de O^*

- Soit un projectile p de masse m_p et d’impulsion \vec{p} bombardant une cible c de masse m_c au repos.

$$\mathcal{P}_p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p}c \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_c = \begin{pmatrix} m_c c^2 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad s = (\mathcal{P}_p + \mathcal{P}_c)^2 = \begin{pmatrix} E + m_c c^2 \\ \vec{p}c \end{pmatrix}^2 = (E + m_c c^2)^2 - p^2 c^2$$

Le scalaire \sqrt{s} est invariant par changement de référentiel, et représente physiquement l’énergie totale disponible pour la collision.

On a aisément $s^2 = E^2 - p^2 c^2 + m_c^2 c^4 + 2Em_c c^2 = m_p^2 c^2 + m_c^2 c^4 + 2Em_c c^2 = m_p^2 c^2 + m_c^2 c^4 + 2m_c c^2 \sqrt{m_p^2 c^2 + p^2 c^2}$

- Particule de masse nulle (le photon par exemple) $\mathcal{P}_p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p}c \end{pmatrix}$ avec $E = pc = h\nu$. Il n’existe pas de référentiel où le photon est au repos, sa vitesse est c quelque soit le référentiel.

1.7 D’un référentiel à l’autre

La matrice de passage (transformation de Lorentz) est indépendante des quantités, donc :

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E^* + \beta c p_x^*) & E^* &= \gamma(E - \beta c p_x) \\ c p_x &= \gamma(c p_x^* + \beta E^*) & c p_x^* &= \gamma(c p_x - \beta E) \\ p_y &= p_y^* & p_y^* &= p_y \\ p_z &= p_z^* & p_z^* &= p_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E^* + \beta c p^* \cos \theta^*) & E^* &= \gamma(E - \beta p \cos \theta) \\ c p \cos \theta &= \gamma(c p^* \cos \theta^* + \beta E^*) & p^* \cos \theta^* &= \gamma(p \cos \theta - \beta E) \\ p \sin \theta &= p^* \sin \theta^* & p^* \sin \theta^* &= p \sin \theta \end{aligned}$$

La figure 1.1 donne la définition de l’angle θ . On remarque que la composante de l’impulsion transverse à la vitesse de déplacement dans \mathcal{R} n’est pas modifiée dans la transformation. Par contre, la composante longitudinale est modifiée ou “boostée” vers l’avant. La paramètre γ est ainsi appelé “boost” de Lorentz.

1.8 Frontière entre relativité et classique

Soit une particule de masse m , d’impulsion pc et d’énergie totale E , on a la relation

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

	Laboratoire	Centre de masse
Etat initial		
Etat final		
Conservation	$\vec{p}_p = \vec{p}_e + \vec{p}_d + \vec{p}_D$ $E_p + E_C = E_e + E_d + E_D$	$\vec{p}_p^* + \vec{p}_C^* = \vec{p}_D^* + \vec{p}_d^* + \vec{p}_e^*$ $E_p^* + E_C^* = E_e^* + E_d^* + E_D^*$
Invariance	$(E_p + E_C)^2 - (\vec{p}_p)^2 = (E_e + E_d + E_D)^2 - (\vec{p}_e + \vec{p}_d + \vec{p}_D)^2 = (E_p^* + E_C^*)^2 - (\vec{p}_p^* + \vec{p}_C^*)^2$ $= (E_e^* + E_d^* + E_D^*)^2 - (\vec{p}_D^* + \vec{p}_d^* + \vec{p}_e^*)^2$	

FIG. 1.2 – Schéma d'une réaction $p + C \rightarrow D + d + e$ dans le référentiel du laboratoire et du centre de masse. La conservation de l'énergie totale et de l'impulsion dans chaque référentiel est représentée.

Dans le cas où $mc^2 \gg pc$, on a :

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4}} = mc^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4} + o\left(\frac{p^4 c^4}{m^4 c^8}\right) \right) \simeq mc^2 + \frac{p^2 c^2}{2mc^2}$$

On retrouve l'expression "classique" (non-relativiste) de l'énergie cinétique T_c .

1.9 Expression de l'énergie cinétique

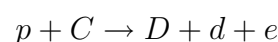
Dans le cas non-relativiste ($mc^2 \gg pc$), $T_c = \frac{p^2 c^2}{2mc^2}$

Dans le cas relativiste, $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = (mc^2 + T_c)^2$, donc $p^2 c^2 = T_c(T_c + 2mc^2)$, ou bien $T_c = E - mc^2$.

Dans le cas ultra-relativiste ($mc^2 \ll pc$), $E^2 = p^2 c^2$, $E = pc = mc^2 + T_c$, donc $T_c = pc$

1.10 Collision en subatomique

Soit une réaction dans laquelle on bombarde une cible de C avec un faisceau de particules p :



On définit deux référentiels :

- Le référentiel du laboratoire : c'est le référentiel lié à l'expérience.
- Le référentiel du centre de masse (cdm), dans lequel $\sum \vec{p}_{initiale} = \sum \vec{p}_{finale} = \vec{0}$. Dans ce référentiel, on a accès à l'énergie de la collision disponible pour la création de nouvelles particules.

Il peut arriver que le cdm soit confondu avec le référentiel du laboratoire.

1.10.1 Conservations et invariance

Dans un des exemples précédents, on a défini le scalaire \sqrt{s} (invariant de Lorentz) qui est l'énergie totale disponible. Dans le *cdm*, cette énergie sert à créer l'ensemble des particules de l'état final et le reste ($= \sqrt{s} - \sum_i m_i c^2$) est donné sous forme d'énergie cinétique à ces particules dans le respect de la conservation de l'impulsion.

Dans chaque référentiel, l'énergie et l'impulsion sont conservés. Cette double conservation s'écrit en terme de quadrivecteur sous la forme (voir la figure 1.2 pour les notations) :

$$\mathcal{P}_i = \begin{pmatrix} E_p + m_c c^2 \\ \vec{p}_p \end{pmatrix} = \mathcal{P}_f = \begin{pmatrix} E_D + E_d + E_e \\ \vec{p}_D + \vec{p}_d + \vec{p}_e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_i^* = \begin{pmatrix} E_p^* + E_c^* c^2 \\ \vec{p}_p^* + \vec{p}_c^* \end{pmatrix} = \mathcal{P}_f^* = \begin{pmatrix} E_D^* + E_d^* + E_e^* \\ \vec{p}_D^* + \vec{p}_d^* + \vec{p}_e^* \end{pmatrix}$$

Mais **le plus important** est l'invariance de la norme du quadrivecteur total par changement de référentiel, ie :

$$\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_f^2 = \mathcal{P}_i^{*2} = \mathcal{P}_f^{*2}$$

1.10.2 Transformations de Lorentz

Si les coordonnées d'un quadrivecteur sont connues dans le référentiel du *laboratoire* par exemple, l'expression de celles-ci sont obtenues dans le référentiel du *cdm* par la transformation de Lorentz, à conditions de connaître la vitesse du *cdm* dans le laboratoire. Par extension de la formule classique⁴ on a :

$$\vec{\beta}_{cdm} = \frac{\vec{p}_1 c + \vec{p}_2 c}{E_1 + E_2} = \frac{\vec{p}_p c + \vec{0}}{E_p + m_c c^2} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{cdm}^2}}$$

Par exemple, dans la transformation du quadrivecteur décrivant la cible *C*, on a :

$$\begin{aligned} E_C^* &= \gamma(m_c c^2 - \beta_{cdm} 0) & E_C^* &= \gamma m_c c^2 \\ p_C^* \cos \theta^* &= \gamma(0 - \beta m_c c^2) & \Rightarrow & & p_C^* &= -\gamma \beta m_c c^2 \\ p_C^* \sin \theta^* &= 0 & & & \theta^* &= 0 \end{aligned}$$

Dans beaucoup de problèmes, une grande partie des énergies et des impulsions sont connues, ce qui permet de simplifier énormément le système comme vous le verrez en TD.

⁴En mécanique classique : $\vec{v}_{cdm} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2}$